

SUMÁRIO

Lista de Símbolos	15
Prefácio	19
1. História e Motivação	23
1.1 Aprendendo a Contar	23
1.2 Comparando Conjuntos Infinitos	25
1.3 O Hotel de Hilbert	27
1.4 Dedekind: Os Conjuntos como Base para a Matemática	28
1.5 O Paraíso de Cantor	30
1.6 Frege e Sua Tentativa de Formalização	36
1.7 Zermelo e a Nova Teoria dos Conjuntos	39
1.8 Hilbert e a Importância da Axiomatização	44
1.9 Gödel e a Importância da Construção	46
1.10 Outros Sistemas de Axiomas	48
1.11 Cohen e a Criação do <i>Forcing</i>	51
1.12 A Teoria dos Conjuntos no Ensino Básico	55
Exercícios	58
2. A Linguagem da Teoria dos Conjuntos	61
2.1 Linguagens de Primeira Ordem	61
2.2 Omissão de Parênteses e Unicidade de Representação	63
2.3 Variáveis Livres	64
2.4 Abreviaturas e Convenções	67
Exercícios	69
3. Primeiros Axiomas	71
3.1 Axioma da Extensão	71
3.2 Axioma do Vazio	72
3.3 Axioma do Par	74

3.4	Axioma da União	76
3.5	Axioma das Partes	78
3.6	Axioma da Separação	78
3.7	Axioma da Regularidade	85
3.8	Axioma da Infinitude	86
	Exercícios	91
4.	Produto Cartesiano, Relações e Funções	95
4.1	Pares Ordenados	95
4.2	Produto Cartesiano	96
4.3	Relações	97
4.4	Funções	100
4.5	Produto Cartesiano Generalizado	105
4.6	Relações de Ordem	106
4.7	Relações de Equivalência	112
4.8	Teorema da Recursão	113
4.9	Aritmética dos Números Naturais	116
	Exercícios	118
5.	Axioma da Escolha e Suas Aplicações	121
5.1	Axioma da Escolha	121
5.2	Lema de Zorn	124
5.3	Princípio da Boa Ordem	128
5.4	Comparabilidade de Conjuntos por Funções Injetoras	131
5.5	Outras Consequências do Axioma da Escolha	133
	Exercícios	135
6.	Conjuntos Equipotentes	137
6.1	O Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein	137
6.2	Conjuntos Finitos	139
6.3	Conjuntos Enumeráveis	144
6.4	Produto de Conjuntos Infinitos	146
6.5	Conjuntos Não Enumeráveis: Teorema de Cantor	148
	Exercícios	150
7.	Ordinais	153
7.1	Axioma da Substituição	153
7.2	Recursão Transfinita	155
7.3	Ordinais	158
7.4	Recursão sobre Relações Bem-fundadas	164
7.5	Aritmética dos Ordinais	171

7.6	Hierarquia Cumulativa dos Conjuntos	179
	Exercícios	181
8.	Cardinais	183
8.1	Cardinais	183
8.2	Escala dos Álefs	189
8.3	Aritmética Cardinal	190
8.4	Hierarquia via Cardinalidade do Fecho Transitivo . . .	194
	Exercícios	195
9.	Ordens Parciais	197
9.1	Anticadeias	197
9.2	Filtros e Ultrafiltros	199
9.3	Axioma de Martin	205
9.4	Lema do Δ -Sistema	213
9.5	Reta de Suslin	215
	Exercícios	222
10.	Noções de Teoria dos Modelos	225
10.1	Codificação da Lógica de Primeira Ordem em ZFC . .	226
10.2	Modelos para Lógica de Primeira Ordem	234
10.3	Teoremas da Completude e Löwenheim-Skolem	238
10.4	Extensão via Definições	242
10.5	Ultraprodutos	249
10.6	Aplicações do Teorema de Łoś	254
	Exercícios	259
11.	Modelos para ZFC	261
11.1	Relativização	261
11.2	Absolutividade	268
11.3	Sobre Semântica e Metalinguagem	277
11.4	Cardinais Inacessíveis	284
11.5	Teorema da Reflexão	287
11.6	O Sistema ZFCM	291
	Exercícios	293
12.	<i>Forcing</i>	295
12.1	Como Provar a Consistência de $ZFC + \neg CH$	296
12.2	Extensão por Filtro Genérico	300
12.3	A Relação de <i>Forcing</i>	306
12.4	Definibilidade da Relação de <i>Forcing</i>	311

12.5	Validade de ZFC na Extensão	321
12.6	Preservação de Cardinais	323
12.7	Independência de CH via <i>Forcing</i>	326
	Exercícios	329
APÊNDICE A.	O Sistema NBG	331
	Exercícios	345
APÊNDICE B.	O Sistema KM	347
	Bibliografia	353
	Índice Remissivo	357
	Sobre o Autor	361