

# EQUAÇÕES COM DERIVADAS PARCIAIS



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

*Reitor* Carlos Gilberto Carlotti Junior  
*Vice-reitora* Maria Arminda do Nascimento Arruda



EDITORA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

*Diretor-presidente* Sergio Miceli Pessoa de Barros

COMISSÃO EDITORIAL

*Presidente* Rubens Ricupero  
*Vice-presidente* Maria Angela Faggin Pereira Leite  
Clodoaldo Grotta Ragazzo  
Laura Janina Hosiasson  
Merari de Fátima Ramires Ferrari  
Miguel Soares Palmeira  
Rubens Luis Ribeiro Machado Júnior  
*Suplentes* Marta Maria Geraldês Teixeira  
Primavera Borelli Garcia  
Sandra Reimão

*Editora-assistente* Carla Fernanda Fontana  
*Chefe Div. Editorial* Cristiane Silvestrin

# EQUAÇÕES COM DERIVADAS PARCIAIS

## CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Renato Belinelo Bortolatto

Copyright © 2023 by Renato Belinelo Bortolatto

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

---

Bortolatto, Renato Belinelo

Equações com Derivadas Parciais: Conceitos Fundamentais/ Renato Belinelo Bortolatto. – São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2023. – (Acadêmica; 122).

Bibliografia.

ISBN 978-65-5785-113-5

1. Equações diferenciais parciais. 2. Matemática – Estudo e ensino. I. Título. II. Série.

23-145435

CDD-515.35

---

Índices para catálogo sistemático:

1. Equações diferenciais: Matemática 515.35

Aline Grazielle Benitez – Bibliotecária – CRB-1/3129

Direitos reservados à

Edusp – Editora da Universidade de São Paulo  
Rua da Praça do Relógio, 109-A, Cidade Universitária  
05508-050 – São Paulo – SP – Brasil  
Divisão Comercial: tel. (11) 3091-4008 / 3091-4150  
www.edusp.com.br – e-mail: edusp@usp.br

Printed in Brazil 2023

Foi feito o depósito legal

*Para Aline, para Antonio e para meus alunos.*



*O meu texto é simples, sincero, é tinta que sai da medula.*

Gabriel, O Pensador, *Linhas Tortas*





# SUMÁRIO

Introdução .....	15
1. Uma Brevíssima História das EDPs.....	23
1.1 D'Alembert .....	25
1.2 Fourier .....	26
1.3 E Além.....	29
2. Equações da Física Matemática .....	33
2.1 Das EDOs às EDPs .....	33
2.2 Variáveis Reais e Grandezas Físicas .....	35
2.3 A Equação do Transporte .....	37
2.4 A Equação da Corda .....	39
2.5 A Equação da Difusão do Calor.....	42
2.6 A Equação de Laplace .....	47
2.7 Exercícios .....	49
3. EDPs no Sentido Clássico .....	51
3.1 EDPs, Operadores Diferenciais e Soluções Clássicas.....	51
3.2 Linearidade .....	56
3.3 Problemas Bem-postos .....	59
3.4 Exemplo: A Equação do Transporte .....	61
3.5 Exercícios .....	64

4.	EDPs de Primeira Ordem .....	67
4.1	Primeiras EDPs .....	67
4.2	EDPs Lineares de Primeira Ordem .....	73
4.3	Solução Geométrica .....	75
4.4	Solução Algébrica .....	78
4.5	Método das Curvas Características .....	81
4.6	EDPs Quasilineares de Primeira Ordem .....	86
4.7	EDPs Não Lineares de Primeira Ordem .....	90
4.8	Exercícios .....	92
5.	EDPs Lineares de Segunda Ordem .....	95
5.1	O Problema de Cauchy para EDPs Lineares de Segunda Ordem .....	95
5.2	Classificação das EDPs Lineares de Segunda Ordem .....	97
5.3	Método das Coordenadas Características .....	100
5.4	Invariância do Discriminante .....	104
5.5	Formas canônicas .....	106
5.5.1	Equações Hiperbólicas .....	107
5.5.2	Equações Parabólicas .....	108
5.5.3	Equações Elípticas .....	109
5.6	Outras Transformações Interessantes .....	110
5.6.1	Eliminando os Termos de Primeira Ordem .....	110
5.6.2	Transformando os Coeficientes de Segunda Ordem em Constantes .....	112
5.7	Exemplo: A Equação de Black-Scholes .....	114
5.8	Exercícios .....	116
6.	A Equação da Corda .....	119
6.1	Solução da Equação da Corda .....	119
6.2	Fórmula de d'Alembert .....	122
6.3	Interpretação das Soluções .....	124
6.4	Cordas com Descontinuidades .....	126
6.5	Equação da Corda com Termo Forçante .....	129
6.6	Equação da Corda Semi-infinita .....	134
	Exercícios .....	139
7.	Da Corda Finita à Série de Fourier .....	143
7.1	Soluções Particulares para a Corda Finita .....	143
7.2	A Série de Fourier .....	148
7.3	Convergência da Série de Fourier .....	156
7.4	Solução da Equação da Corda com Extremos Fixos .....	164
7.5	Exercícios .....	168

8. Separação de Variáveis .....	171
8.1 Difusão do Calor com Extremos a Temperatura Fixa ....	171
8.2 Um Problema de Dirichlet para a Equação de Laplace ..	176
8.3 Um Problema de Neumann.....	180
8.4 Um Problema de Robin .....	184
8.5 Exemplo: Não Universalidade do Método da Separação .....	191
8.6 Exercícios .....	192
9. Fourier-Bessel e Fourier-Legendre.....	195
9.1 Película Circular em Vibração .....	195
9.2 Equação de Laplace na Esfera .....	205
Exercícios .....	216
10. Funções de Bessel .....	221
10.1 Funções de Bessel Modificadas .....	221
10.2 Funções de Bessel Modificadas de Parâmetro Natural ...	223
10.3 A Função Gama.....	225
10.4 Funções de Bessel ( Não Natural) .....	229
10.5 Exercícios .....	230
11. Equações Não Homogêneas.....	233
11.1 Não Homogeneidades Elementares.....	233
11.2 Homogeneização das Condições de Contorno .....	236
11.3 Expansão em Série .....	239
11.4 Exercícios .....	245
12. Teoria de Sturm-Liouville.....	247
12.1 O problema regular de Sturm-Liouville .....	247
12.2 Interpretação Geométrica e Exemplos .....	256
12.3 Uma Aplicação .....	261
12.4 Exercícios .....	263
13. Representações em Séries e o Espaço $l^2$ .....	267
13.1 O Espaço $l^2$ .....	267
13.2 Desigualdade de Bessel .....	271
13.3 A Identidade de Parseval .....	274
13.4 Exercícios .....	276
14. Sequências de Funções .....	279
14.1 Convergência Simples, Absoluta e Uniforme .....	279
14.2 Integrabilidade e Diferenciabilidade.....	285
14.3 Convergência Pontual, Uniforme e $l^2$ .....	290

14.4	Convergência da Série de Fourier .....	293
14.5	Exemplo: Convergência da Solução da Difusão do Calor .....	295
14.6	Exercícios .....	298
15.	Unicidade de Soluções e Dependência Contínua .....	301
15.1	Algumas Palavras sobre Topologia do Plano .....	302
15.2	Unicidade para a Equação de Laplace .....	302
15.3	Unicidade para a Equação do Calor .....	306
15.4	Unicidade para a Equação da Onda .....	310
15.5	Dependência Contínua para a Equação do Calor .....	313
15.6	Dependência Contínua para a Corda Infinita .....	315
15.7	Exercícios .....	315
16.	A Equação de Laplace no Plano .....	319
16.1	O Teorema da Média .....	319
16.2	O Teorema de Liouville .....	323
16.3	Exercícios .....	325
17.	A Transformada de Fourier .....	327
17.1	Introdução .....	327
17.2	Da Integral à Transformada de Fourier .....	329
17.3	Solução Formal da Equação do Calor na Reta .....	332
17.4	O Espaço de Schwartz .....	335
17.5	A Transformada de Fourier .....	339
17.6	Propriedades da Transformada de Fourier .....	345
17.7	Determinação de Algumas Transformadas de Fourier ...	349
17.8	Exercícios .....	354
18.	A Transformada Inversa .....	357
18.1	A Inversa da Transformada de Fourier.....	357
18.2	O Produto de Convolução .....	364
18.3	Condução do Calor na Barra Infinita .....	372
18.4	Equação de Laplace no Semiplano Superior.....	376
18.5	Exercícios .....	379
	Apêndice A. Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) .....	385
	Apêndice B. A Transformada de Fourier da Secante Hiperbólica .....	397
	Apêndice C. Transformadas de Fourier.....	403
	Apêndice D. Respostas dos Exercícios .....	407

Bibliografia .....	425
Índice Remissivo .....	429
Sobre o Autor .....	433



# INTRODUÇÃO

## PRÉ-REQUISITOS

Os pré-requisitos principais deste curso são familiaridade com cálculo em uma e várias variáveis reais e familiaridade com equações diferenciais ordinárias () de primeira e segunda ordem. Uma breve recordação sobre os métodos de resolução de EDOs é feita no apêndice A para que você possa se adaptar à notação adotada neste texto e para servir de rápida referência.

De forma mais específica, para este texto é suficiente conhecimento com a profundidade apresentada nos livros de cálculo de James Stewart<sup>1</sup> e na parte inicial do livro de equações diferenciais de William E. Boyce & Richard C. DiPrima<sup>2</sup>. Não é esperado conhecimento de análise real, complexa ou funcional, mas neste curso começa a ficar evidente a importância desses temas mesmo para uma formação que não seja exclusivamente em matemática.

Em alguns poucos pontos, usamos conceitos próprios do cálculo vetorial e conceitos específicos sobre séries. A falta de conhecimento

1. James Stewart, *Cálculo*, 2013.

2. William E. Boyce e Richard C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 1992.

sobre esses assuntos não impedirá que você continue a leitura do restante do texto.

## AOS ESTUDANTES

O estudo das equações com derivadas parciais é, para grande parte dos alunos, um dos pontos mais difíceis de seus cursos. Há complicações de ordem técnica, como exercícios longos e com contas que podem ser cansativas e fáceis de errar. Há dificuldades de ordem teórica, como a introdução de uma boa quantidade de novas ideias e definições, além do uso concomitante de conceitos estudados em outros cursos. O desenvolvimento das técnicas de resolução frequentemente passa por raciocínios laterais que envolvem intuições tanto da matemática quanto da física. Os teoremas têm hipóteses delicadas sem as quais podem deixar de valer, e isso faz com que precisemos ser bastante precisos na escrita.

Este é o ponto de seu curso em que de fato começamos a aplicar o que aprendemos nas disciplinas de matemática para entender um pouco a nossa realidade. É claro que não podemos esperar que isso seja uma tarefa fácil. Em compensação, deve ser extremamente recompensador e motivante ver como é possível usar o ferramental desenvolvido até aqui para resolver problemas que consideramos importantes.

Há ótimos livros escritos com maior grau de sofisticação do que usaremos aqui<sup>3</sup>, mas você pode ter alguma dificuldade de entendê-los sem ter explorado o assunto antes. Há também ótimas obras com enfoque mais direto<sup>4</sup>, mas talvez você não se sinta confortável e confiante com esse tipo de estudo.

A abordagem escolhida aqui passa pela dedução das equações estudadas, juntamente com a discussão das hipóteses fisicamente relevantes e das propriedades qualitativas das soluções. A teoria é admitidamente complicada, mas tem um fluxo bastante natural de sofisticação, que sempre tenta reduzir EDPs em EDOs de formas cada vez menos elementares.

Não custa lembrar que os exercícios devem ser encarados como parte do texto. Ao ler uma seção, tente resolver as questões e consulte as respostas no final caso tenha dificuldade. Muitos exercícios têm também alguma dica acompanhando a resposta, use-a com sabedoria. No texto veremos teoremas, faremos, sempre que possível,

3. Como Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2010, por exemplo.

4. Como Erwin Kreyszig, *Matemática Superior para Engenharia*, 2000.



suas provas e exploraremos a necessidade das respectivas hipóteses com exemplos. Você já deve estar acostumado com isso se cumpriu seu ciclo básico na universidade, e, agora, mais do que antes, será necessário lidar com esse estilo de escrita científica, pois as contas em si são, muitas vezes, pouco ilustrativas, consomem muito tempo e são de dificuldade razoável. Em outras palavras, apesar de os pré-requisitos serem modestos, nesse momento, faz-se necessário um grau maior de abstração do que antes.

As palavras “teorema” e “prova” são carregadas de conotações negativas, mas têm uma função específica na cultura científica e, por isso, serão usadas neste texto. Convido você a pensar que teoremas e suas provas são apenas formas de organizar resultados e as ideias que levam a eles. Na sua maioria, os resultados apresentados neste livro são consequência de desenvolvimentos simples, e você deve ser capaz de entendê-los e fazer raciocínios similares nos exercícios.

Difícilmente você conseguirá absorver e dominar todo o conteúdo aqui apresentado em apenas um semestre. Se não estiver confortável com algum resultado ou exercício, você deve tentar continuar lendo e voltar mais tarde: isso faz parte da leitura de textos em qualquer área científica. Tenha certeza de que seus professores, cada um no seu ritmo, faziam e fazem o mesmo procedimento. O aprendizado raramente ocorre em apenas uma direção e quase nunca em velocidade constante.

Finalmente, torço para que você goste da leitura, porque este livro foi feito para você. Escrevê-lo me trouxe boas lembranças de como se apaixonar pelo assunto. Espero que eu tenha conseguido transmitir um pouco disso nestas páginas e desejo que você termine sua leitura também almejando aprender mais.

## AOS PROFESSORES

Este livro trata da teoria clássica das equações diferenciais parciais de primeira ordem e das equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem em baixas dimensões.

Este material foi idealizado, quanto à sua complexidade, para estar inserido nos cursos de graduação com dificuldade e pré-requisitos compatíveis com uma formação de qualidade em matemática, física, engenharia e afins, mas não necessariamente apenas na etapa final desses cursos. No caso das engenharias, os cursos de graduação que incluem disciplinas de equações diferenciais parciais ou métodos matemáticos da física a oferecem no final do ciclo básico (por volta do quarto semestre), e os alunos em geral não tiveram disciplinas dedica-

das aos pré-requisitos de análise necessários para o entendimento de um número considerável de resultados. Uma das abordagens possíveis é tratar os problemas de forma algorítmica, com pouca discussão qualitativa. Caso esta seja a (legítima) escolha do professor, já há bom material disponível em português de maneira comercial para auxiliá-lo em seu curso<sup>5</sup>. Para cursos mais avançados, temos em português os livros de Valéria Iório<sup>6</sup> e de Djairo G. de Figueiredo<sup>7</sup>. Além disso, nesse caso recomendo também os livros clássicos como o de Walter A. Strauss<sup>8</sup>, Fritz John<sup>9</sup>, Lawrence C. Evans<sup>10</sup> e Gerald B. Folland<sup>11</sup>, ainda que não estejam disponíveis em português.

O livro foi planejado para servir de suporte para um curso de 4 horas-aula semanais durante um semestre. Há mais material do que é possível abordar sem pressa com essa carga horária, cabendo ao docente escolher os temas que julgar mais importantes para apresentar em aula. Começamos com uma breve introdução à história das EDPs, apresentamos a notação multi-índice e uma primeira classificação para introduzir a linguagem de operadores diferenciais. Fazemos a dedução das equações clássicas da física matemática e passamos ao estudo das primeiras EDPs que os alunos provavelmente já viram em outros cursos, como equações da forma  $\Delta u = 0$ .

Realizamos um estudo em nível introdutório do método das curvas características para EDPs de primeira ordem chegando até a resolução de EDPs não lineares de primeira ordem, quando apresentamos as equações de Charpit-Lagrange. A discussão dessa seção é mais ampla em relação ao que é apresentado na maior parte da literatura para a graduação, mas pode ser bastante reduzida por aqueles professores que escolherem reservar mais tempo para o estudo das equações de segunda ordem.

Discutimos então a classificação de EDPs lineares de segunda ordem por via da generalização do método das curvas características no método das coordenadas características. Estudamos as formas canônicas das EDPs lineares de maneira bastante precisa, fazendo a prova do teorema da invariância do discriminante e exibindo explicitamente as formas canônicas das equações lineares de coeficientes constantes. Passamos ao estudo das equações clássicas de segunda ordem, começando por deduzir a solução de D'Alembert para a equação da corda

5. Consulte, por exemplo, Erwin Kreyszig, *Matemática Superior para Engenharia*, 2000.

6. Valéria Iório, *EDP, um Curso de Graduação*, 2005.

7. Djairo Guedes de Figueiredo, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, 2000.

8. Walter A. Strauss, *Partial Differential Equations: An Introduction*, 2007.

9. Fritz John, *Partial Differential Equations*, 1982.

10. Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2010.

11. Gerald B. Folland, *Fourier Analysis and its Applications*, 2009.

LANÇAMENTO 2023

# JÁ DISPONÍVEL

LIVRARIA VIRTUAL

[www.edusp.com.br/loja](http://www.edusp.com.br/loja)

LIVRARIAS

[www.edusp.com.br/livrarias](http://www.edusp.com.br/livrarias)

INFORMAÇÕES

Divulgação Edusp

[divulga@usp.br](mailto:divulga@usp.br)

